領域のスタイン性と助変数を伴う線形微分方程式系の大域的正則解の存在について (複素領域における微分方程式)

梶原, 壤二

数理解析研究所講究録
351巻 1979年 50-68

領域のスタイン性と助変数を伴う線形微分方程式系の大域的正則解の存在について

九大 理　梶原 壌二

序．1956年 L. Ehrenpreis[1]は層の理論を微分方程式の大域的解の存在の解明に用いることを提唱した．九大理助手に任命された講演者は当時教授であった柴垣和三雄先生のお勧めでこの問題に取り組んだ．1963年金沢大学に移って直に次の結果をKōdai Math. Sem. Rep. [3]に発表させて頂くと共に，神戸大学における函数方程式論分科会シンポジウムにて講演する機会を与えられた：Dを複素平面Cの領域，$\mathcal{M}$をD上の有理型関数芽全体の層とする．pを自然数とし，a_{jk} $(j,k=1,2,\dots,p)$をDで有理型な関数とする．$f=(f_1,f_2,\dots,f_p)\in\mathcal{M}^p$ に対して

$$(1)\qquad Tf=\left(\frac{df_1}{dz}+\sum_{k=1}^{p}a_{1k}f_k,\ \frac{df_2}{dz}+\sum_{k=1}^{p}a_{2k}f_k,\ \dots,\ \frac{df_p}{dz}+\sum_{k=1}^{p}a_{pk}f_k\right)$$

によって層の準同型 $T:\mathcal{M}^p\to\mathcal{M}^p$ を定義する．その核の層を$\mathrm{Ker}\,T$ とおくと $H^1(D,\mathcal{M}^p)=0$ であるから

(2) $$H^1(D, \mathrm{Ker}\,\mathcal{P}) = H^0(D, \mathcal{P}\mathfrak{M}^p)/\mathcal{P}H^0(D, \mathfrak{M}^p)$$

が成立し，$\mathcal{P}f=g$ が局所解をもつ大域的有理型関数 g に対して常に大域的有理型解(勿論一価性を要求している) f が存在するための必要十分条件は $H^1(D, \mathrm{Ker}\,\mathcal{P})=0$ である．さて $H^1(D, \mathrm{Ker}\,\mathcal{P})=0$ が成立すれば，Dは単連結または2重連結である．Dが単連結の時，$H^1(D, \mathrm{Ker}\,\mathcal{P})=0$ であるための必要十分条件は一点を除いてDの各点に有理型接続できるような一次独立な p 個の斉次解が存在することである．Dが2重連結の時，$H^1(D, \mathrm{Ker}\,\mathcal{P})=0$ であるための必要十分条件は $H^0(D, \mathrm{Ker}\,\mathcal{P})=0$ が成立することである．

1968年 I. Wakabayashi [16] は C^n $(n \geq 2)$ の領域Dにて，D上のすべての正則関数 g に対して

(3) $$\frac{\partial f}{\partial z_1} = g$$

の大域的正則解 f が存在するためには z_1−平面へのすべての切り口が単連結であることは十分条件ではないことを示した．1972年 H. Suzuki [15] は次のような必要十分条件を与えた：Dを C^n $(n \geq 2)$ の正則領域とし，$\Psi: D \to C^{n-1}$ を $n-1$ 変数 $z_2, z_3, \ldots, z_n$ への射影とする．Ψ の茎は平面領域と同相であるが必ずしも連結ではない．その連結成分全体の集合 $\tilde{D}$ はDの商集

合であり，商位相を与え位相空間とする．必要十分条件はすべての $(z_2, z_3, \cdots, z_n) \in C^{n-1}$ に対して切り口 $\psi^{-1}(z_2, z_3, \cdots, z_n)$ の各連結成分が単連結であり，商空間 $\tilde{D}$ が Hausdorff で自然な複素構造により C^{n-1} 上の不分岐被拡領域となる $\tilde{D}$ が C^{n-1} の上の正則領域であることである．

1973年講演者は京大数解研の研究集会「解析的常微分方程式の大域的研究」にて講演し(講究録[10]参照)，この結果を一般化した．この研究は Y. Mori の協力の下でなされ，1974年の Czechoslovak Math. J. [8]に次のような内容で発表させて頂いた：

S をスタイン多様体，D を複素平面 C と S との積多様体 C×S のスタイン領域，$\mathcal{O}$ を D 上の正則関数芽全体の層，p を自然数とする．$a_{jk}(z, x)$ $(j, k = 1, 2, \cdots, p)$ を D 上の正則関数とする．$f = (f_1, f_2, \cdots, f_p) \in \mathcal{O}^p$ に対して(1)式によって準同型 $T: \mathcal{O}^p \to \mathcal{O}^p$ を定義する．Cartan－Oka－Serre の定理より $H^1(D, \mathcal{O}^p) = 0$ であるから

$$(4) \qquad H^1(D, \mathrm{Ker}\, T) = H^0(D, \mathcal{O}^p) / T H^0(D, \mathcal{O}^p)$$

であり，D 上の大域的正則関数 g に対して常に大域的一価正則な $Tf = g$ の解 f が存在するための条件は $H^1(D, \mathrm{Ker}\, T) = 0$ である．射影 $\psi: D \to S$ に対して，$(z, x) \in S$ を含む $\psi^{-1}(x)$ の連結成分を $D(z, x)$ とし，それらの集合

(5) $\tilde{D}=\{D(z,x);\ (z,x)\in D\}$

をDの商集合とみなし，商位相を与える．$H^1(D,\mathrm{Ker}\nabla)=0$であれば，$D(z,x)$はすべて単連結であるか，またはすべて2重連結であるかのいずれかである．2重連結の場合，$H^1(D,\mathrm{Ker}\nabla)=0$であるための必要十分条件は$\tilde{D}$がHausdorff空間で，すべての$(z,x)\in D$に対して，切り口にて$H^0(D(z,x),\mathrm{Ker}\nabla)=0$が成立することである．単連結の場合，若干の条件の下で，$H^1(D,\mathrm{Ker}\nabla)=0$が成立するための必要十分条件は$\tilde{D}$がやはりHausdorff空間で自然な複素構造に関して$\tilde{D}$がスタイン多様体であることである．講演者は助変数空間と関数の値の空間が無限次元の場合にも，この問題を考察し，1976年Jap. J. Math. [6]に発表させて頂いた．

1972年 С.И. Пинчук [8]は次の内容の様な論文を発表した：C^mをm複素変数$z=(z_1,z_2,\cdots,z_m)$の空間，C^nをn複素変数$s=(s_1,s_2,\cdots,s_n)$の空間とし，zを独立変数，sを助変数に用い積空間C^{m+n}を考察し，Dをその正則領域とする．$\mathcal{O}$をD上の正則関数芽全体の層とし，$f\in\mathcal{O}$に対して

(6) $\nabla f=\left(\frac{\partial f}{\partial z_1},\frac{\partial f}{\partial z_2},\cdots,\frac{\partial f}{\partial z_m}\right)$

によって準同型$\nabla:\mathcal{O}\to\mathcal{O}^m$を定義する．層の短い完全列

(7) $$0 \to \mathrm{Ker}\, P \to \mathcal{O} \xrightarrow{P} P\mathcal{O} \to 0$$

よりコホモロジー群の完全列

(8) $$\begin{aligned}&\cdots \to H^0(D,\mathcal{O}) \xrightarrow{P} H^0(D,P\mathcal{O}) \to H^1(D,\mathrm{Ker}\,P) \to H^1(D,\mathcal{O}) \to \\ &\cdots \to H^p(D,\mathcal{O}) \xrightarrow{P} H^p(D,P\mathcal{O}) \to H^{p+1}(D,\mathrm{Ker}\,P) \to H^{p+1}(D,\mathcal{O}) \to \\ &\cdots\end{aligned}$$

がえられる．$H^p(D,\mathcal{O})=0$ $(p \geq 1)$ より

(9) $$H^1(D,\mathrm{Ker}\,P) = H^0(D,\mathcal{O}) / P H^0(D,\mathcal{O})$$

がえられる．従って，大域的解の存在 $H^0(D,\mathcal{O}) = PH^0(D,\mathcal{O})$ とコホモロジー群の消滅 $H^1(D,\mathrm{Ker}\,P)=0$ とは同値である．

今回，木村俊房教授より京大数解研の研究集会「複素領域における微分方程式」での講演を依頼され，それから泥縄式に新らしい結果をえる様努力している時，ふとI・H・PのBibliothèqueで読んだ上記Πинчукの論文を想起し，このコホモロジー群の消滅の同語反復でない解析的な条件付けをえることを考えた．現在九大理院修士課程二年生小柳良平氏の協力の下で，次の様な結果をえた．この研究に対して上記先達に感謝するとともに，本講演を依頼し，本研究の直接的契機を与えて下さった，木村俊房教授に心から感謝の意を表わしたい．

§1. 定理の陳述.

C^m を m 複素変数 $z=(z_1,z_2,\dots,z_m)$ の空間とし $(m\geqq 2)$, C^n を n 複素変数 $s=(s_1,s_2,\dots,s_n)$ の空間とし $(n\geqq 1)$, D を積空間 C^{m+n} の正則領域とし, $\mathcal{O}$ を D 上の正則関数芽全体の層とする. 層の準同型対応 $\mathcal{P}:\mathcal{O}\to\mathcal{O}^m$ を(6)によって定義し, 層 $\mathrm{Ker}\mathcal{P}$, $\mathrm{Im}\mathcal{P}$ を, それぞれ, $\mathcal{P}$ の核及び像の層とする. $\Psi: D\to C^n$ を射影とし, $(z,s)\in D$ に対して, $\Psi^{-1}(s)$ の (z,s) を含む連結成分を $D(z,s)$ と記す. (z,s) が D を動く時の切り口の連結成分 $D(z,s)$ 全体の集合 $\tilde{D}$ は D の商集合であり, 商位相を与える. この時, 次の諸命題は同値である:

(イ) C^n の任意の複素部分平面 A に対して

(10) $$H^0(\Psi^{-1}(A),\mathrm{Im}\mathcal{P})=\mathcal{P}H^0(\Psi^{-1}(A),\mathcal{O}).$$

(ロ) C^n の任意の複素部分平面 A に対して

(11) $$H^1(\Psi^{-1}(A),\mathrm{Ker}\mathcal{P})=0.$$

(ハ) C^n の任意の複素部分平面 A に対して

(12) $$\dim H^1(\Psi^{-1}(A),\mathrm{Ker}\mathcal{P})<\infty.$$

(ニ) $\tilde{D}$ は Hausdorff 空間であり, 自然な写像 $\varphi:\tilde{D}\to C^n$ に対して, 被拡領域 $(\tilde{D},\varphi)$ は C^n の上の正則領域である.

(ホ) $p=1,2,\cdots,n$ に対して

(13) $$H^p(D, \mathrm{Ker}\,\mathcal{P}) = 0.$$

(ヘ) $p=1,2,\cdots,n$ に対して

(14) $$\dim H^p(D, \mathrm{Ker}\,\mathcal{P}) < \infty.$$

§2. 層 $\mathrm{Ker}\,\mathcal{P}$ と $\mathrm{Im}\,\mathcal{P}$ の説明.

$\mathrm{Ker}\,\mathcal{P}$ は $\mathcal{P}f=0$ をみたす $\mathcal{O}$ の元 f 全体の集合であり，芽 $f\in\mathcal{O}$ が $f\in\mathrm{Ker}\,\mathcal{P}$ を満すための必要十分条件は，

(15) $$\frac{\partial f}{\partial z_1} = \frac{\partial f}{\partial z_2} = \cdots = \frac{\partial f}{\partial z_m} = 0$$

が恒等的に成立すること，即ち，f が z に無関係な関数の芽であることである．一方 $\mathrm{Im}\,\mathcal{P}$ は $\mathcal{P}f=g$ をみたす芽 $f\in\mathcal{O}$ があるような芽 $g=(g_1, g_2, \cdots, g_m)\in\mathcal{O}^m$ 全体の集合であり，この時

(16) $$g_1 = \frac{\partial f}{\partial z_1},\ g_2 = \frac{\partial f}{\partial z_2},\ \cdots,\ g_m = \frac{\partial f}{\partial z_m}$$

が成立している．それ故 $g\in\mathrm{Im}\,\mathcal{P}$ であるためには

(17) $$\frac{\partial g_j}{\partial z_k} = \frac{\partial g_k}{\partial z_j} \quad (j,k=1,2,\cdots,m)$$

が成立することが必要条件であるが、次の補題が示す様に十分条件でもある.

補題1. $\Delta_1, \Delta_2, \cdots, \Delta_m$ を複素平面の単連結領域, S を複素多様体とし, $\Omega = \Delta_1 \times \Delta_2 \times \cdots \times \Delta_m \times S$ とおく. $g = (g_1, g_2, \cdots, g_m) \in H^0(\Omega, \mathcal{O}^m)$ が Ω にて恒等的に (17) を満せば, $f \in H^0(\Omega, \mathcal{O})$ があって $\nabla f = g$ が成立する.

証明. 各 Δ_i より定点 a_i を取り, $(z_1, z_2, \cdots, z_m, s) \in \Omega$ に対して

$$(19) \quad f(z,s) = \int_{a_1}^{z_1} g_1(\zeta_1, z_2, \cdots, z_{m-1}, s)\, d\zeta_1 + \int_{a_2}^{z_2} g_2(a_1, \zeta_2, z_3, \cdots, z_m, s)\, d\zeta_2$$

$$+ \cdots + \int_{a_m}^{z_m} g_m(a_1, a_2, \cdots, a_{m-1}, \zeta_m, s)\, d\zeta_m$$

によって定義される $f \in H^0(\Omega, \mathcal{O})$ は $\nabla f = g$ の解である.(証明3).

以上の様に s 変数の助変数空間と z 変数の独立変数空間の積集合の形に定義域がなっていると好都合であるが、一般にはそうでなく事態が複雑になっている. これを追求することが本講演の目的である.

§3. 助変数空間の次元を下げること.

補題2. D を (z,s) 変数の空間 C^{m+n} の領域とし, C^n の上の

正則関数全体の芽の層を$\mathcal{O}_\Lambda$と下添字ΛをつけてDのそれと区別する．$\mathcal{F}$をD上の$\mathcal{O}_\Lambda$-加群の層とする．AをC^nの超平面，(即ち余1次の複素部分平面とし)射影$\psi: D \to C^n$を用いる．層$\mathcal{F}$に対して，($\mathrm{Ker}\,\mathcal{P}$等が満している)次の条件(イ)を仮定する．

(イ) (C^{m+n-1}の領域と同型な)$D \cap (C^m \times A)$の任意の領域Eに対して，任意の$f \in H^0(E, \mathcal{F})$は$f \circ \psi \in H^0(\psi^{-1}(\psi(E)), \mathcal{F})$を満す。

この時，$p \geq 1$に対して

$$(19) \qquad N_p = \dim H^p(D, \mathcal{F}) + 1$$

とおく．N_pとN_{p+1}が有限ですれば，

$$(20) \qquad \dim H^p(\psi^{-1}(A), \mathcal{F}) < N_p N_{p+1}$$

が成立する．

証明．$A = \{\lambda_1 = 0\}$と仮定して一般性を失なわない．$\mathfrak{U} = \{U_\lambda; \lambda \in I\}$を$\psi^{-1}(A) = D \cap (C^m \times A)$の任意の開被覆，$f^{(a,b)} = \{f^{(a,b)}_{i_0 i_1 \cdots i_p}\} \in Z^p(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$を$(a,b) \in \{1, 2, \ldots, N_p\} \times \{1, 2, \ldots, N_{p+1}\}$と$N_p N_{p+1}$個任意にとる．各$\lambda \in I$について$V_\lambda = \psi^{-1}(\psi(U_\lambda))$は$D$の開集合である．$D$の開被覆$\mathfrak{V} = \{V_\lambda; \lambda \in I\} \cup \{V_0\}$ (ただし$V_0 = D - A$)について$G^{(a,b)} = \{G^{(a,b)}_{\lambda_0 i_1 \cdots \lambda_{p+1}}\} \in Z^{p+1}(\mathfrak{V}, \mathcal{F})$を各$(a,b)$に対して次の様に定義する：

$$(21)\quad G^{(a,b)}_{i_0 i_1\cdots i_{p+1}}(z,\lambda) = \begin{cases} \dfrac{f^{(a,b)}_{i_0 i_1 \cdots i_{p+1}}(z,\lambda)}{\lambda_1}, & \text{丁度 } i_0, i_1, \ldots, i_{p+1} \text{ の中に } 0 \text{ が、即ち } V_0 \text{ に対応する添字が一つだけある時} \\ 0, & \text{それ以外、即ち、} 0 \text{ が全くないか、二つ以上ある時} \end{cases}$$

$\dim H^{p+1}(D, \mathcal{F}) < N_{p+1}$ であるから D の開被覆 $\mathcal{V}$ の細分 $\mathcal{W} = \{W_j ; j \in J\}$ と各 $a \in \{1, 2, \ldots, N_p\}$ に対して、N_{p+1}－ベクトル $(c_{ab}) \neq 0$ と $h^{(a)} \in C^p(\mathcal{W}, \mathcal{F})$ があって、射影 $\rho : J \to I$ について $\sum_b c_{ab}\rho^* G^{(a,b)}$ は $h^{(a)}$ のコバウンダリーとなる．$W_{j_0} \cap W_{j_1} \cap \cdots \cap W_{j_{p+1}}$ にて

$$(22)\quad F^{(a)}_{j_0 j_1 \cdots j_{p+1}} = \sum_b (c_{ab}\rho^* G^{(a,b)}_{j_0 j_1 \cdots j_{p+1}} - \sum_{\nu=1}^{p+1}(-1)^{\nu}\lambda_1 h_{j_0 j_1 \cdots \hat{j_\nu} \cdots j_{p+1}})$$

とおくと，$W_{j_0} \cap W_{j_1} \cap \cdots \cap W_{j_{p+1}} \cap W_{j_0'}$ にて $\rho j_0 = \rho j_0' = 0$ が成立するような $\{j_0, j_1, \ldots, j_{p+1}\}$，$\{j_0', j_1, \ldots, j_{p+1}\}$，(即ち $V_{\rho j_0} = V_{\rho j_0'} = D - A$ の時)，に対して

$$(23)\quad F^{(a)}_{j_0 j_1 \cdots j_{p+1}} = F^{(a)}_{j_0' j_1 \cdots j_{p+1}} = \sum_b c_{ab}\rho^* f^{(a,b)}_{j_1 j_2 \cdots j_{p+1}}$$

が成立する．よって $F^{(a)}_{j_0 j_1 \cdots j_{p+1}}$ は j_0 の取り方に無関係に，$W_{j_1} \cap \cdots \cap W_{j_{p+1}}$ で定義される．即ち，$F^{(a)} = \{F^{(a)}_{j_1 j_2 \cdots j_{p+1}}\} \in Z^p(\mathcal{W}, \mathcal{F})$ を $\rho j_0 = 0$ であるような任意の j_0 を用いて $W_{j_0} \cap W_{j_1} \cap \cdots \cap W_{p+1}$ にて

$$(24)\quad F^{(a)}_{j_1 j_2 \cdots j_{p+1}} = F^{(a)}_{j_0 j_1 \cdots j_{p+1}}$$

が成立する様に選ぶことが出来る．$\dim H^p(D,\mathcal{F})<N_p$ であるから，更に細かいDの開被覆$\mathfrak{W}$を考えると，N_p−ベクトル$(c_a)\neq 0$と$\mathfrak{k}\in C^{p-1}(\mathfrak{W},\mathcal{F})$があって$\sum_a c_a F^{(a)}$は$\mathfrak{k}$のコバウンダリーである．したがって$\sum_a\sum_b c_{ab}\,g^*f^{(a,b)}$は$\mathfrak{k}|\Psi^{-1}(A)$のコバウンダリーである．よって$\dim H^p(\Psi^{-1}(A),\mathcal{F})<N_pN_{p+1}$を得る．（証明3）

§3．商空間$\tilde{D}$の分離性

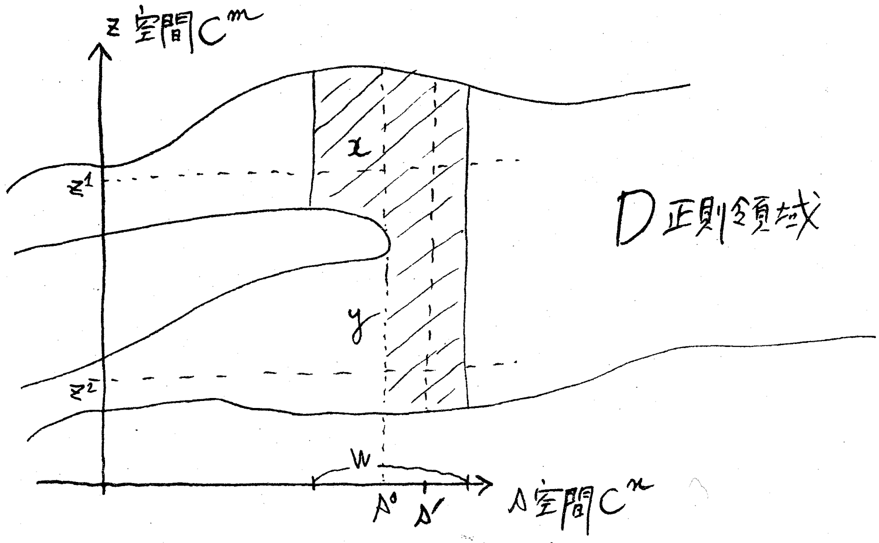
補題3．§1の記号の下で，$p=1,2,\cdots,n$に対して(14)即ち

(14) $\dim H^p(D,\mathrm{Ker}\,\mathcal{T})<\infty$

が成立すれば，$\tilde{D}$はHausdorff空間である．

証明 背理法による．$\tilde{D}$が分離的でなければ，$\tilde{D}$の相異なる2点x,yがあって，x,yの近傍系のヒルター$\mathfrak{U}(x),\mathfrak{U}(y)$は$\tilde{D}$上のヒルター$\mathcal{F}$を生成する．$\mathcal{F}\supset\mathfrak{U}(x)$，$\mathcal{F}\supset\mathfrak{U}(y)$であるから，ヒルター$\mathcal{F}$は$\tilde{D}$の二点$x,y$に收束する．標準写像$\varphi:\tilde{D}\to C^n$は連続であるから，$C^n$上のヒルターの基底$\varphi(\mathcal{F})$は$C^n$の点$\varphi(x),\varphi(y)$に收束する．$C^n$は分離的であるから，$\varphi(x)=\varphi(y)$が成立している．この点を$A^0=\varphi(x)=\varphi(y)$とおく．$\tilde{D}$の点$x,y$は$\Psi^{-1}(A^0)$の連結成分であるから，$z^1,z^2\in C$があり，$x=D(z^1,A^0)$，$y=D(z^2,A^0)$と表わされる．$C^n$における点$A^0$の開近傍$W$があっ

て $\{z^1\}\times W\subset D$, $\{z^2\}\times W\subset D$. $W^1=\{D(z^1,s);s\in W\}$, $W^2=\{D(z^2,s);s\in W\}$ は商空間 $\tilde{D}$ における x, y の W と同相な近傍である。仮定より $W^1\cap W^2\neq\phi$ であり、$s'\in W$ があって $D(z^1,s')=D(z^2,s')\subset W^1\cap W^2$. 今迄判明した事柄を図示する。



上図の如く、s^0 上での二つの成分が、s^0 の任意近傍 W 内の点 s' 上では一つに合流している。逆に見ると、s が動くとともに一つの成分が二つ以上に枝分れしている。$\tilde{D}$ の分離性はこのように s 上の成分が s が動くとともに二つ以上に枝分れしないことを保証する条件であることが分る。閑話休題、証明を続行する。s^0 と s' が定義する複素 1 次元の平面 A を C^n 内で考察する。仮定(14)、補題2と数学的帰納法より

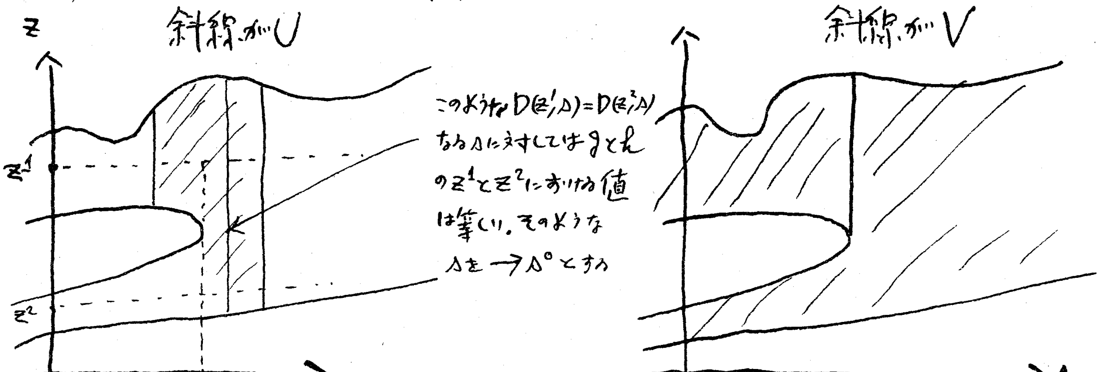
$$(25)\qquad \dim H^1(\Psi^{-1}(A), \mathrm{Ker}\,\Psi) < \infty$$

が成立する。$U=\bigcup_{s\in W} D(z^1,s)$ は点 (z^1,s^0) の D における開近傍で

図において斜線をもって表わされた領域であり，重要なことは切り口の成分 Y を集合とみた $D(z^2,\lambda^0)$ を含まぬことである．これに反し，$V=D-D(z^1,\lambda^0)$ は D の開集合であり，成分 Y を含まない．$\mathcal{U}=\{U,V\}$ は D の開被覆であり，$(\lambda-\lambda^0)^{-a}$ は，$N=\dim H^1(\Psi^{-1}(\lambda),\mathrm{Ker}\,\mathcal{P})+1$ に対して，$a\in\{1,2,\cdots,N\}$ の時，$H^0(U\cap V,\mathrm{Ker}\,\mathcal{P})$ の元であり，$Z^1(\mathcal{U},\mathrm{Ker}\,\mathcal{P})$ の元を定義する．自然な写像 $H^1(\mathcal{U},\mathrm{Ker}\,\mathcal{P})\to H^1(D,\mathrm{Ker}\,\mathcal{P})$ は単射であるから，$\dim H^1(\mathcal{U},\mathrm{Ker}\,\mathcal{P})<N$ が成立し，この被覆 $\mathcal{U}$ のままで，N-ベクトル $(c_a)\neq 0$ と $g\in H^0(U,\mathrm{Ker}\,\mathcal{P})$，$h\in H^0(V,\mathrm{Ker}\,\mathcal{P})$ があって，$U\cap V=\bigcup_{\lambda\in W,\,\lambda\neq\lambda^0} D(z^1,\lambda)$ にて

$$(26)\qquad \sum_{a=1}^{N} c_a(\lambda-\lambda^0)^{-a}=g(z,\lambda)-h(z,\lambda)$$

が成立している．h，g は定義より，$\Psi^{-1}(\lambda)$ の各成分上では定数である，即ち，z に関係しない．前頁の図を二つ書く．



背理法の仮定より，$\Omega=\{\lambda\in W;\ D(z^1,\lambda)=D(z^2,\lambda)\}$ は λ^0 を触点とする λ 平面の開集合で $\lambda\in\Omega$ の時，h，g は $\Psi^{-1}(\lambda)$ の各成分上では

zに無関係であるから

(27) $\quad g(z^1, \lambda) = g(z^2, \lambda)\ ,\ h(z^1, \lambda) = h(z^2, \lambda)$

が成立している．したがってΩ内で$\lambda \to \lambda^0$とすると

(28) $\quad \lim_{\lambda \to \lambda^0,\, \lambda \in \Omega} g(z^2, \lambda) = \lim_{\lambda \to \lambda^0,\, \lambda \in \Omega} g(z^1, \lambda) = g(z^1, \lambda^0) =$ 有限確定

を得る．(26) よりΩ内で$\lambda \to \lambda^0$とすると

(29) $\quad \lim_{\lambda \to \lambda^0,\, \lambda \in \Omega} h(z^2, \lambda) = \lim_{\lambda \to \lambda^0,\, \lambda \in \Omega} \left(g(z^2, \lambda) - \sum_{a=1}^{N} C_a (\lambda - \lambda^0)^{-a} \right) = \infty$

を得るが，hは(z^2, λ^0)の近傍で正則であるから，

(30) $\quad \lim_{\lambda \to \lambda^0} h(z^2, \lambda) = h(z^2, \lambda^0) =$ 有限確定

を得，(29) と (30) は矛盾する．(証明3).

§4. $\tilde{D}$の構造層と層 $\mathrm{Ker}\, \mathcal{T}$.

補題3より商空間$\tilde{D}$は Hausdorff 空間である．$\tilde{D}$の各元$D(z, \lambda)$に対してλを対応させる対応$\varphi : \tilde{D} \to C^n$は局所同相であるから，$\tilde{D}$は局所ユークリッド空間である．$\tilde{D}$の分離性が示されたので，$(\tilde{D}, \varphi)$を不分岐被拡領域とする様な$\tilde{D}$上の複素構造がある，その構造層を$\tilde{\mathcal{O}}$と書く．つまり$\tilde{\mathcal{O}}$は$\tilde{D}$上の正則関数芽全体の層である．$C^n$の任意の開集合$\Delta$に対して，

$\psi^{-1}(\Delta)$ は D の開集合であり，$\varphi^{-1}(\Delta)$ は $\tilde{D}$ の開集合である．各 $\Delta \in C^n$ に対して $\mathrm{Ker}\,\mathcal{P}$ の切片は $\psi^{-1}(\Delta)$ の各連結成分上では互に無関係であり，Δ のみに関係するが，一つの Δ の上に多くの成分がある場合 Δ については多価ではするが，各連結成分を一点とみた $\tilde{D}$ の開集合 $\varphi^{-1}(\Delta)$ の $\tilde{\mathcal{O}}$ の一価な切片とみなすことができる．このような自然な対応により，C^n の任意の開集合 Δ に対して

$$(31) \qquad H^0(\psi^{-1}(\Delta), \mathrm{Ker}\,\mathcal{P}) = H^0(\varphi^{-1}(\Delta), \tilde{\mathcal{O}})$$

が成立し，このような意味で $\mathrm{Ker}\,\mathcal{P}$ と $\tilde{\mathcal{O}}$ は本質的には同じものである．$\Delta_1, \Delta_2, \cdots, \Delta_m$ を平面の開円板，Δ を C^n の多重円板とし，C^{m+n} の開多重円板の族

$$(32) \qquad P = \{\Delta_1 \times \Delta_2 \times \cdots \times \Delta_m \times \Delta\}$$

を考察する．P の元よりなる D の開被覆全体の族

$$(33) \qquad \mathrm{Cov}_P D = \{\{U_i; i \in I\}; U_i \in P\}$$ （I の濃度 $<$ ある濃度としないと基礎論の先生からしかられるでしょうが）

を考察する．$\mathrm{Cov}_P D$ は D の開被覆全体の族 $\mathrm{Cov}\,D$ の中でコハイナルで，各 $\mathfrak{U} \in \mathrm{Cov}_P D$ は等式(31)より $\mathrm{Ker}\,\mathcal{P}$ に関して Leray 被覆であり，$\mathfrak{U} = \{U_i; i \in I\} \in \mathrm{Cov}_P D$ に対して，$\tilde{D}$ の開被覆 $\tilde{\mathfrak{U}}$ を標準写像 $\varpi : D \to \tilde{D}$ を用いて

(34) $\quad \widetilde{\mathfrak{U}} = \{\varpi(V_i) ; i \in I\}$

によって定義すると，$\widetilde{\mathfrak{U}}$は$\widetilde{D}$のスタイン被覆である．結論として

<u>補題4</u>. $\mathfrak{U} \in \mathrm{Cov}_p D$ に対して，$p \geq 1$ であれば

(35) $\quad H^p(D, \mathrm{Ker}\, T) = H^p(\mathfrak{U}, \mathrm{Ker}\, T) = H^p(\widetilde{\mathfrak{U}}, \widetilde{\mathcal{O}}) = H^p(\widetilde{D}, \widetilde{\mathcal{O}})$

が成立する．

この補題の応用として

<u>補題</u> 5. 補題3の仮定の下で，$\widetilde{D}$はスタイン多様体である．

証明. $p \geq 1$ に対して，補題4と仮定(14)より

(36) $\quad \dim H^p(\widetilde{D}, \widetilde{\mathcal{O}}) = \dim H^p(D, \mathrm{Ker}\, T) < \infty$

を得るので，H. B. Laufer [13] より $\widetilde{D}$は正則領域，即ち，スタイン多様体である．

§5. 定理の証明.

(イ)⟷(ロ) スタイン多様体，即ち，Aの上の正則領域$\Psi^{-1}(A)$に対して公式(9)を適用すればよい．

(ロ)⟶(ハ)，(ホ)⟶(ヘ) 証明すべきものはない．

(ヘ)⟶(ニ) 補題3,5より導かれる．

(ハ)→(ニ)　$\dim A=1$ の時の仮定より，先ず補題3の証明より$\tilde{D}$は分離的である。$\dim A=2$ の時の仮定と補題5より，$\varphi^{-1}(A)$は正則領域であり，S. Hitotumatu [2] より $\tilde{D}$ 自身が正則領域即ちスタインである．(正確には一松＋岡の両先生より)．

(ニ)→(ホ)　補題4とOka-Cartan-Serreの定理より，$p\geqq 1$ の時

(37)　$$H^p(D, \mathrm{Ker}\,\varphi) = H^p(\tilde{D}, \tilde{\mathcal{O}}) = 0$$

を得る．

(ニ)→(ロ)　$\varphi^{-1}(A)$は正則領域であるから，上と同じく

(38)　$$H^1(\varphi^{-1}(A), \mathrm{Ker}\,\varphi) = H^1(\varphi^{-1}(A), \tilde{\mathcal{O}}) = 0$$

を得る．

Bibliographie

[1] L. Ehrenpreis, Sheaves and differential equations, Proc. Amer. Math. Soc. 7(1956),1131-1139.

[2] S. Hitotumatu, On some conjectures concerning pseudo-convex domains, J. Math. Soc. Jap. 6(1954),177-195.

[3] J. Kajiwara, On an application of L. Ehrenpeis' method to ordinary differential equations, Kōdai Math. Sem. Rep. 15(1963),94-105.

[4] J. Kajiwara, Domain with many vanishing cohomology sets, Kōdai Math. Sem. Rep. 26(1975),258-266.

[5] J. Kajiwara, La réciproque du théorème d'annulation et de finitude de cohomologie dans l'espace produit d'une famille dénombrable de sphères de Riemann, Bull. Soc. math. France 103(1975),129-139.

[6] J. Kajiwara, Solutions holomorphes globales des équations différentielles linéaires à valeurs dans un espace de Hilbert et à paramètre complexe, Jap. J. Math. 2(1976), 91-107.

[7] J. Kajiwara and H. Kazama, Two dimensional complex manifold with vanishing cohomology set, Math. Ann. 204(1973),1-12.

[8] J. Kajiwara and Y. Mori, On the existence of global solutions of differential equations with complex parameters, Czechoslovak Math. J. 24(1974),444-454.

[9] 梶原壌二，コホモロジー類が消滅する2次元の複素多様体について，

数理解析研究所講究録 141 (1972), 62-86.

[10] 梶原壌二, 微分方程式の解析的解の大域的存在について, 数理解析研究所講究録 175 (1973), 43-54.

[11] Y. Mori, A complex manifold with vanishing cohomology sets, Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ. 26(1972),179-191.

[12] 毛織泰子, Serreの定理の一般化について, 数理解析研究所講究録 141 (1972), 108-140.

[13] H. B. Laufer, On sheaf cohomology and envelopes of holomorphy, Ann. of Math. 84(1966),102-118.

[14] S. I. Pinčuk, On the existence of holomorphic primitives, Soviet Math. Dokl. 13-3(1972),654-657.

[15] H. Suzuki, On the global existence of holomorphic solutions of the equations $\partial u/\partial x_1=f$, Sc. Rep. T. K. D. 11(1972),181-258.

[16] I. Wakabayashi, Non existence of holomorphic solutions of $\partial u/\partial z_1=f$, Proc. Japan Acad. 444(1968),820-822.